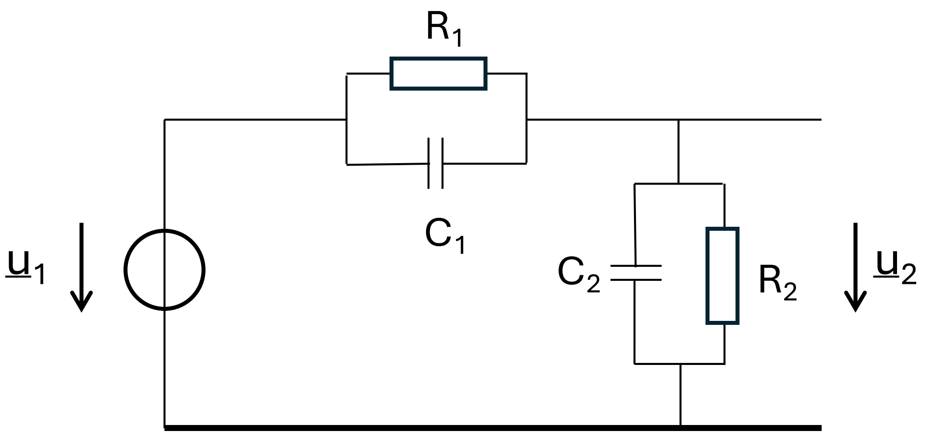
Préparation MIDTERM 1 du 07.11.2025

Impédances, fonction de transfert et diagrammes de Bode

Kirchhoff, Thévenin – Norton, superposition

Réduction après transformation triangle ⟺ étoile, calcul de puissance

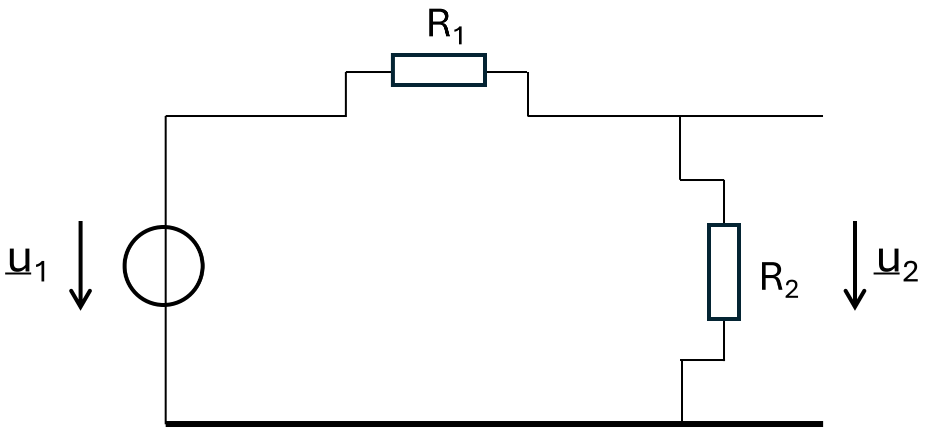


Appliquer la recette de cuisine qui sera donnée dans l'énoncé

Objectif : Dessiner le Bode pour le module et l'argument pour des pulsations comprises entre ω_{MIN} et ω_{MAX}

1) **Analyse du circuit lorsque $\boldsymbol{\omega \rightarrow 0}$:**

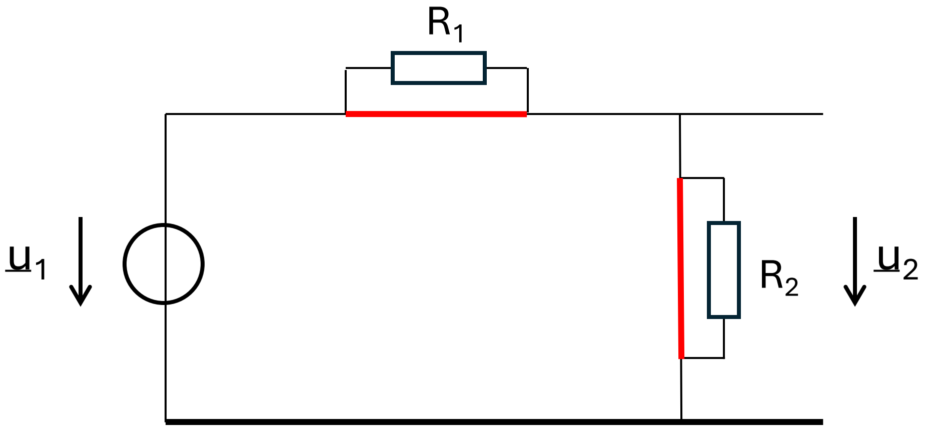
- On remplace les deux condensateurs par des circuits ouverts
- Ce qui donne le circuit équivalent ci-contre



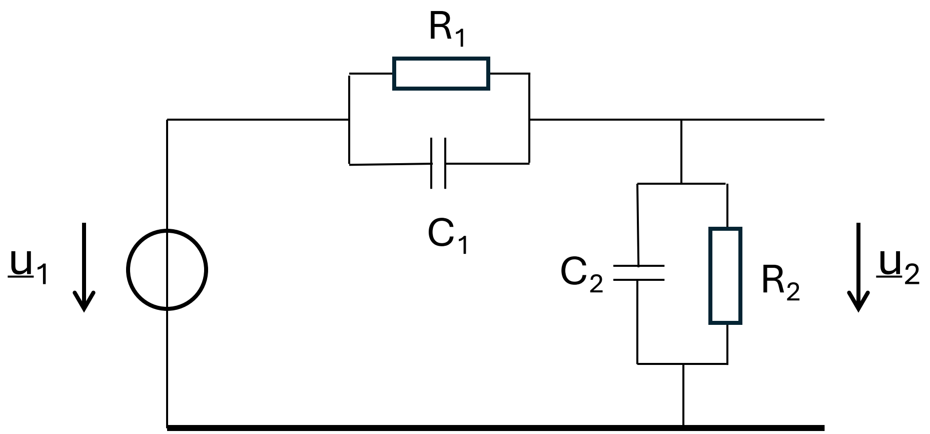
$$\frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

2) **Analyse du circuit lorsque $\boldsymbol{\omega \rightarrow \infty}$:**

- On remplace les deux condensateurs par des courts-circuits
- Ce qui donne le circuit équivalent ci-contre



$$\frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} = \frac{0}{0+0}? \rightarrow \frac{\frac{1}{j\omega C_2}}{\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{\frac{1}{C_2}}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$



3) **Expressions de $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$**

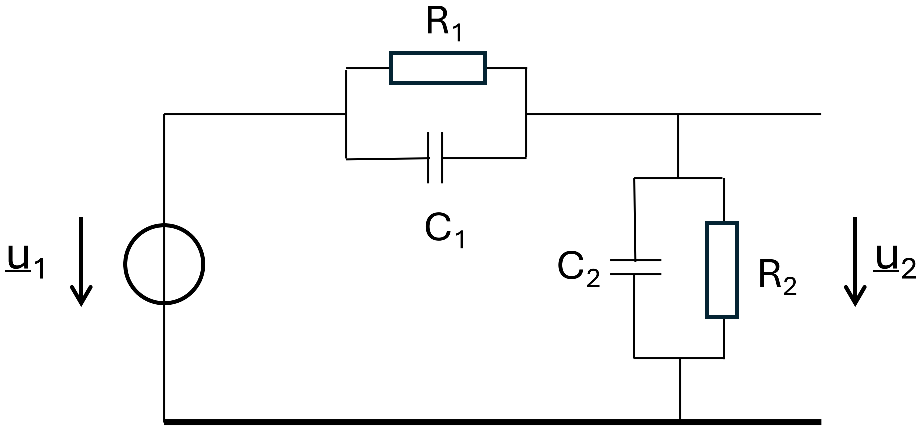
$$\underline{Z}_1 = \frac{R_1 \cdot \frac{1}{j\omega C_1}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C_1} \qquad \underline{Z}_2 = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2}$$

4) **Expression de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$**

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2}}{\frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C_1} + \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2}} = \frac{\frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2}}{\frac{R_1 \cdot (1 + j\omega R_2\, C_2) + R_2 \cdot (1 + j\omega R_1 C_1)}{(1 + j\omega R_1 C_1) \cdot (1 + j\omega R_2\, C_2)}}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R_2 \cdot (1 + j\omega R_1 C_1)}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2\, C_2 + j\omega R_1 R_2\, C_1} = \frac{R_2 \cdot (1 + j\omega R_1 C_1)}{(R_1 + R_2) \cdot \left(1 + j\omega \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} [C_1 + C_2]\right)} \quad de\ la\ forme\ K \cdot \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}$$

$$Avec\ K = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \qquad \omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1} \quad et \quad \omega_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 [C_1 + C_2]}$$



5) **Vérification** :

- On calcule le module de la fonction de transfert.
- Il n'est pas nécessaire de calculer ici en dB pour comparer avec les résultats des points 1 et 2

Expression de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$

$$\left|\underline{H}(j\omega)\right| = \left|K \cdot \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}\right| = K \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}}$$

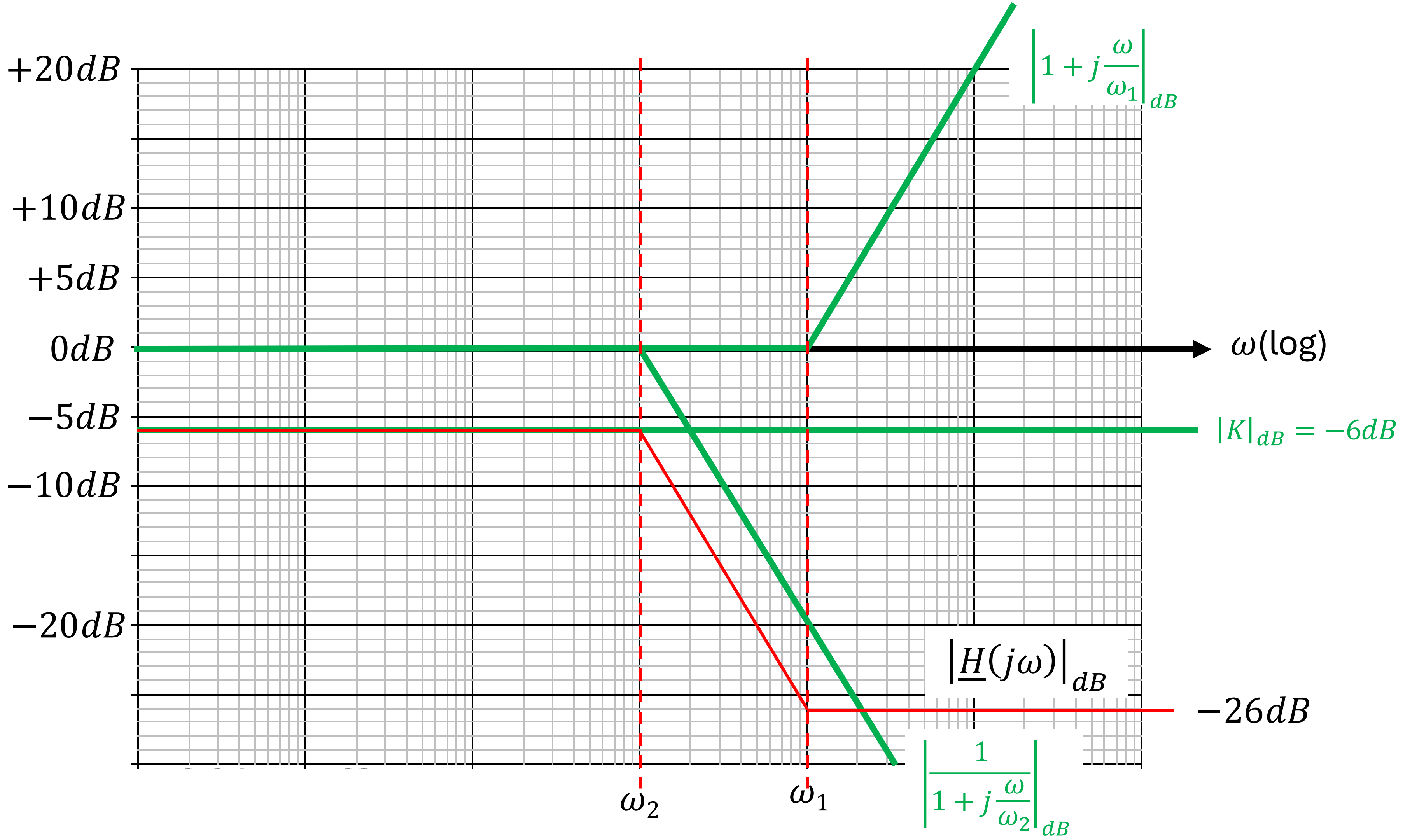
$$\lim_{\omega \to 0} \left|\underline{H}(j\omega)\right| = K \cdot \frac{\sqrt{1 + (0)^2}}{\sqrt{1 + (0)^2}} = K = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad CQFD$$

$$\lim_{\omega \to \infty} \left|\underline{H}(j\omega)\right| = K \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}} = K\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 [C_1 + C_2]}}{\frac{1}{\ }} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \quad CQFD$$

6.1) Diagramme de Bode pour le module

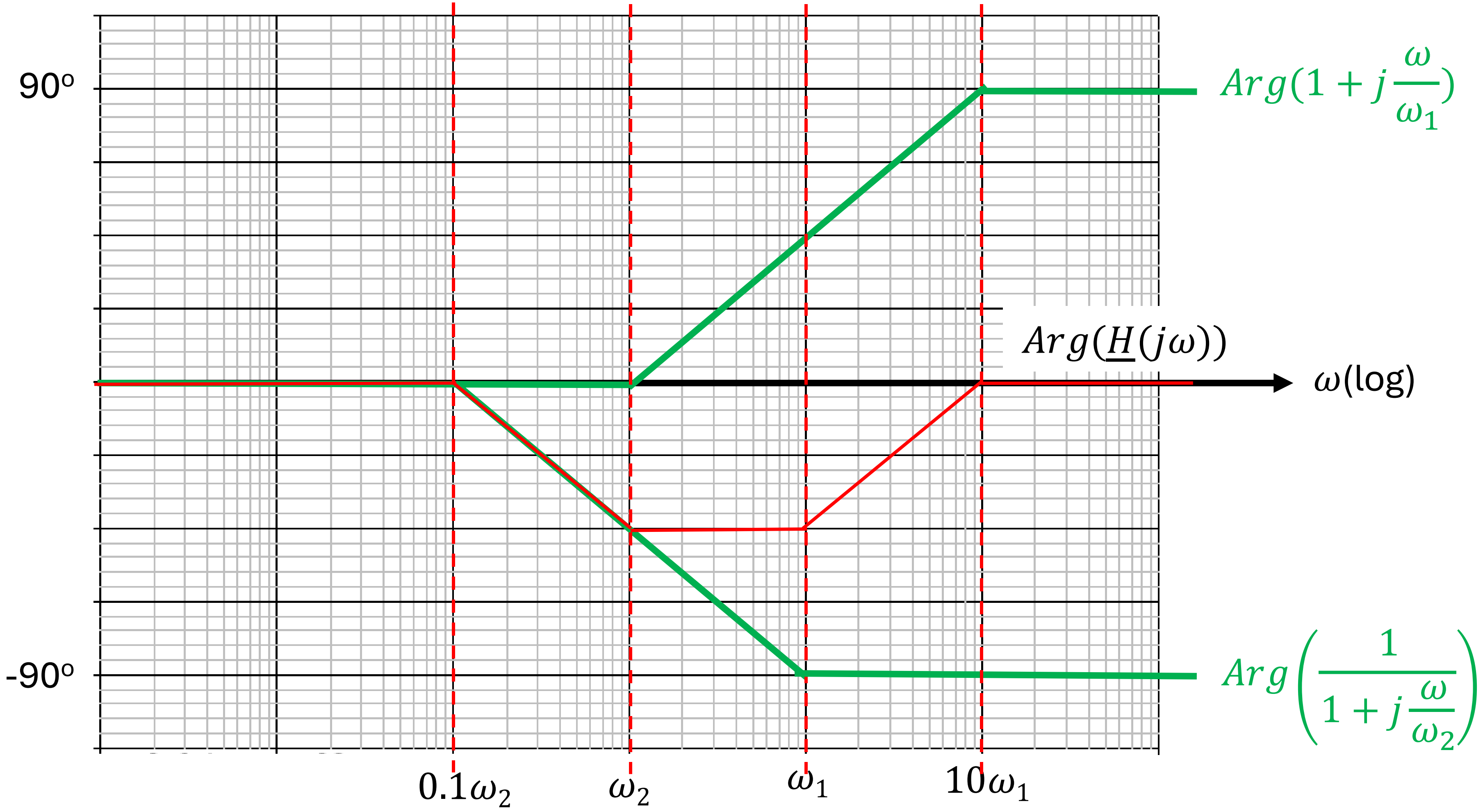
- On donne : $R_1 = 1k\Omega, R_2 = 1k\Omega, C_1 = 10nF, C_2 = 190nF$

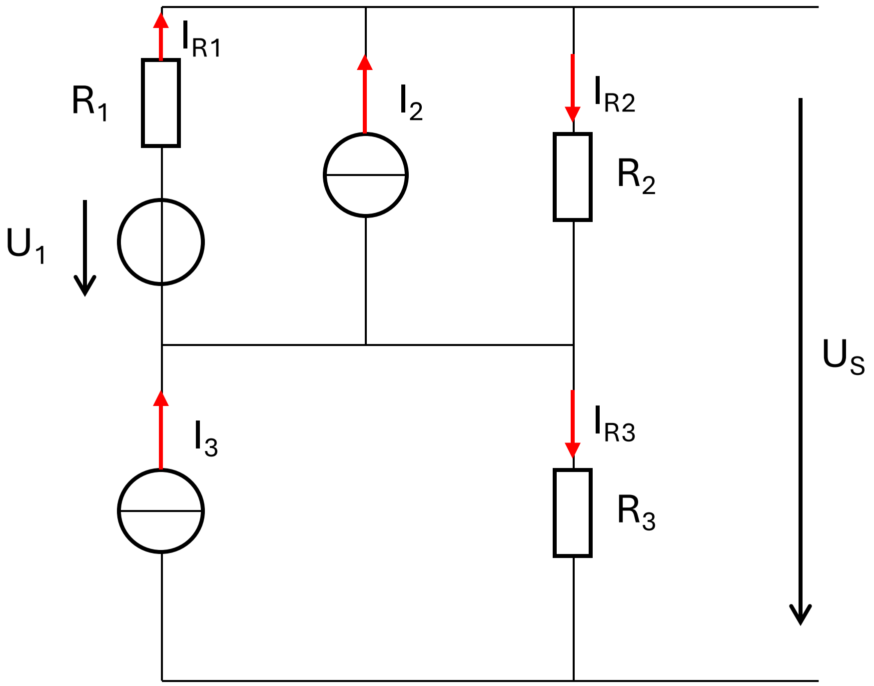
$$K = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{2}, \qquad \omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1} = \frac{1}{10^{-5}} = 10^5 \frac{rad}{s} \quad et \quad \omega_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 [C_1 + C_2]} = 10^4 \frac{rad}{s}$$



6.2) Diagramme de Bode pour l’argument

$Arg(K)$ n'est pas représenté car $Arg(K) = 0$





On veut :

- Poser sans les résoudre les équations du système avec les lois de Kirchhoff
- Trouver le modèle Thévenin du circuit complet
- Calculer la tension U_S en utilisant exclusivement le théorème de superposition (**PLUS DIFFICILE**)
- Comparer le modèle de Thévenin avec la tension U_S calculée par superposition

Equations du système en posant les lois de Kirchhoff.
On observe trois inconnues : I_{R1}, I_{R2} et I_{R3}. Il faut donc trois équations.

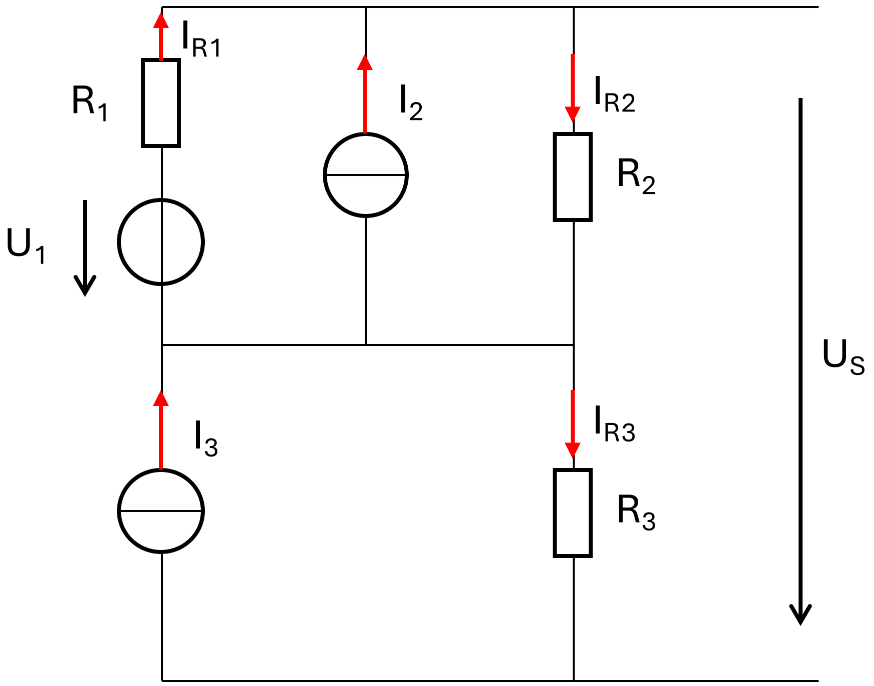
Une seule maille exploitable : $R_2 \cdot I_{R2} - U_1 + R_1 \cdot I_{R1} = 0$

Deux nœuds exploitables : $I_{R1} + I_2 = I_{R2}$

$I_{R3} = I_3$

Ce système est très facile à résoudre mais ce n'est pas toujours le cas.

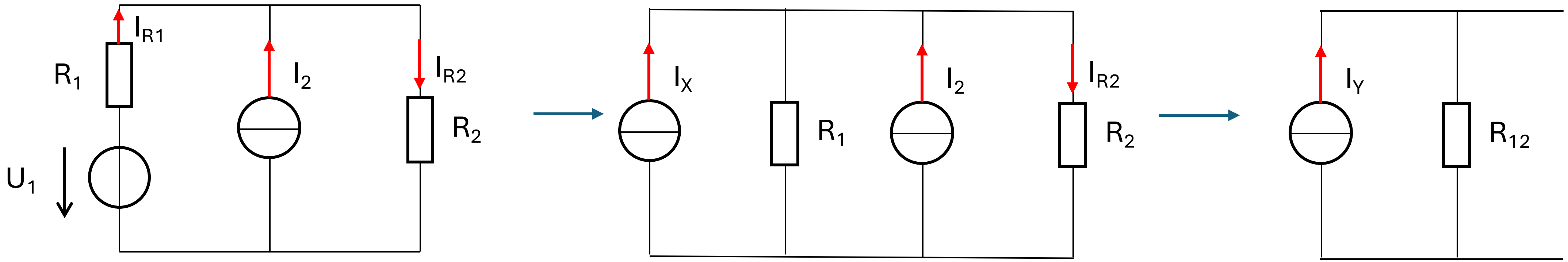
Trouver le modèle Thévenin du circuit complet



On remarque qu'il y a trois dipôles locaux :

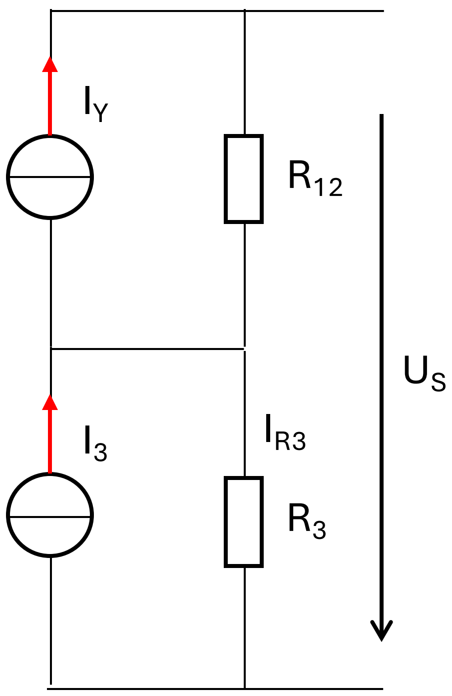
- Modèle Thévenin constitué de (U_1 et R_1)
- Modèle Norton constitué de (I_2 et R_2)
- Modèle Norton constitué de (I_3 et R_3)

Le Thévenin (U_1 et R_1) est en parallèle avec le Norton (I_2 et R_2) et ce couple est en série avec le Norton (I_3 et R_3)
On doit d'abord réduire (U_1 et R_1) et (I_2 et R_2) en transformant le Thévenin en Norton
Le Norton obtenu étant en série avec (I_3 et R_3) , les deux Norton seront transformés en Thévenin

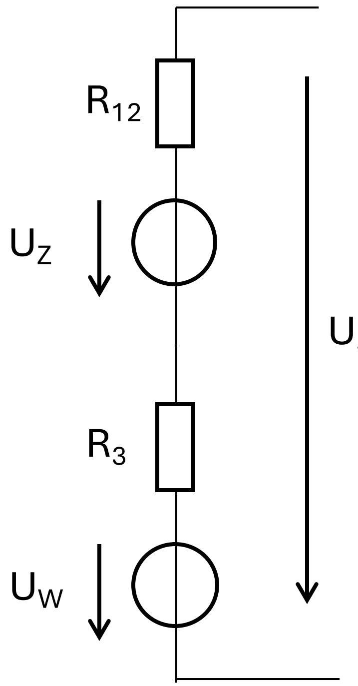


$$I_X = \frac{U_1}{R_1}$$

$$I_Y = \frac{U_1}{R_1} + I_2 \quad et \quad R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

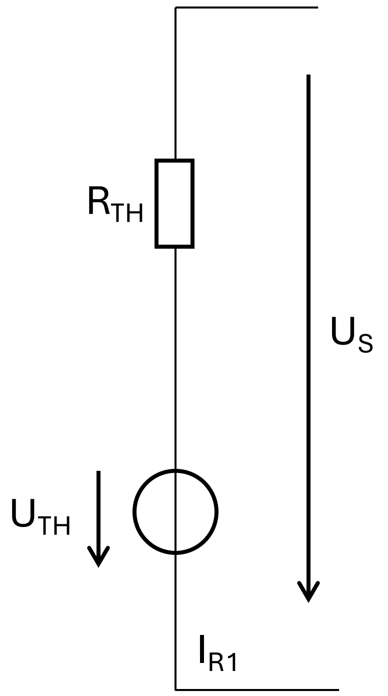


Les deux Norton sont en série. Pour procéder à la réduction, il faut les transformer en Thévenin



$$U_Z = R_{12} \cdot I_Y \;\; et \;\; U_W = R_3 \cdot I_3$$

La réduction donne le Thévenin suivant

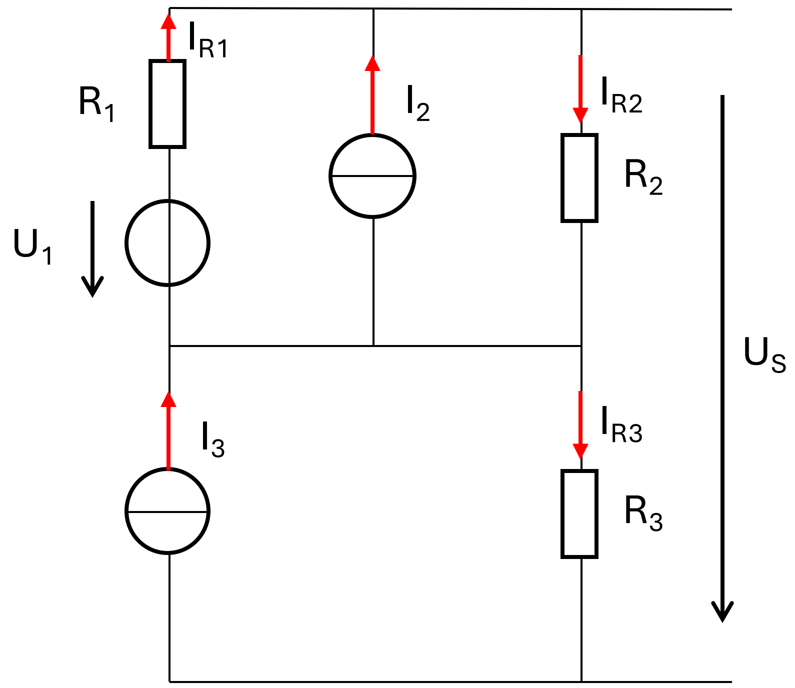


$$U_{TH} = U_Z + U_W$$
$$et \;\; R_{TH} = R_3 + R_{12}$$

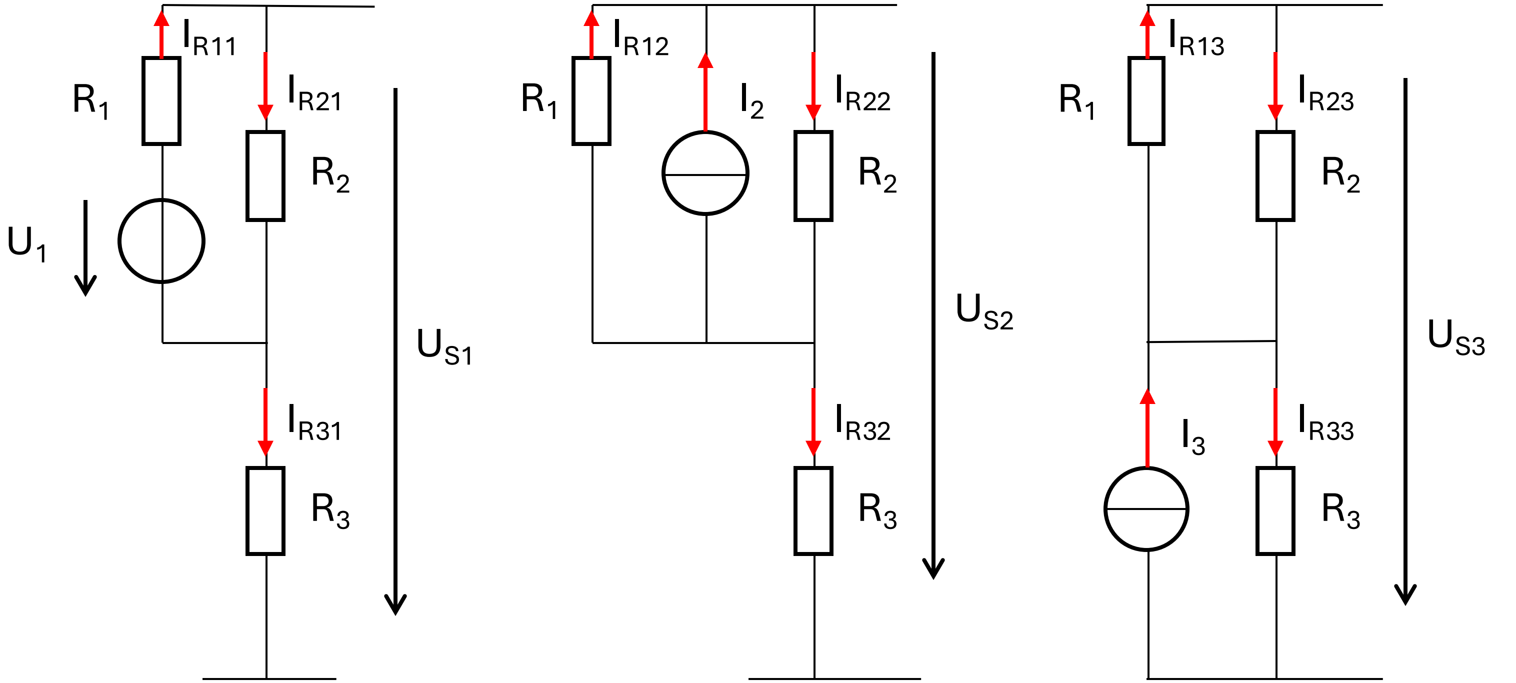
En remplaçant par les termes d'origine on trouve

$$U_{TH} = U_Z + U_W = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot \left(\frac{U_1}{R_1} + I_2 \right) + R_3 \cdot I_3 = \boldsymbol{U_1} \cdot \frac{\boldsymbol{R_2}}{\boldsymbol{R_1 + R_2}} + \boldsymbol{I_2} \cdot \frac{\boldsymbol{R_1 \cdot R_2}}{\boldsymbol{R_1 + R_2}} + \boldsymbol{R_3 \cdot I_3}$$
$$et \;\; R_{TH} = R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Exploitation du théorème de superposition



Nous avons trois sources nécessitant trois développements

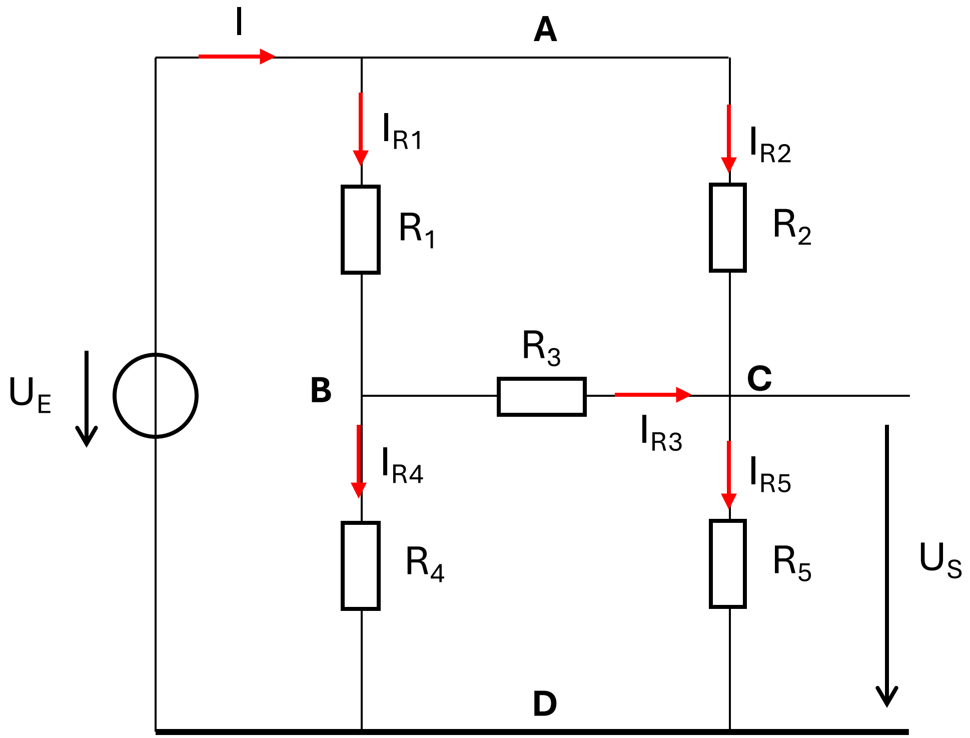


$$R_3 \cdot I_{R31} = 0 \Rightarrow U_{S1} = U_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_3 \cdot I_{R32} = 0 \Rightarrow U_{S2} = I_2 \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_1 \cdot I_{R13} = R_2 \cdot I_{R23} = 0 \Rightarrow U_{S3} = R_3 \cdot I_3$$

$$\text{Finalement } U_S = U_{S1} + U_{S2} + U_{S3} = \boldsymbol{U_1} \cdot \frac{\boldsymbol{R_2}}{\boldsymbol{R_1 + R_2}} + \boldsymbol{I_2} \cdot \frac{\boldsymbol{R_1 \cdot R_2}}{\boldsymbol{R_1 + R_2}} + \boldsymbol{R_3 \cdot I_3} \quad CQFD$$



On veut calculer :

- La résistance équivalente vue par U_E,
- Le courant I réparti dans le réseau de résistances,
- La puissance produite par la source de tension U_E,
- La tension entre C et D, appelée U_S

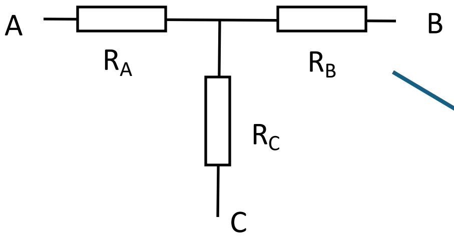
Le calcul de U_S est le plus délicat.

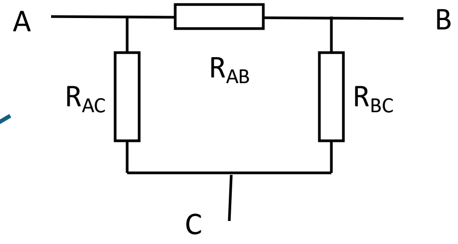
Premières remarques :

- Deux triangles : ABC et BCD
- Deux étoiles : ACD**B** et ABD**C**.
- **Attention** : Ne pas faire disparaître le segment CD pour calculer U_S.

Conclusion : ne pas toucher ABD**C**, ni BCD.
On choisit arbitrairement de travailler avec ABC.

Rappel transformations triangle ⇔ étoile





$$R_A = \frac{R_{AB}.R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

$$R_B = \frac{R_{AB}.R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

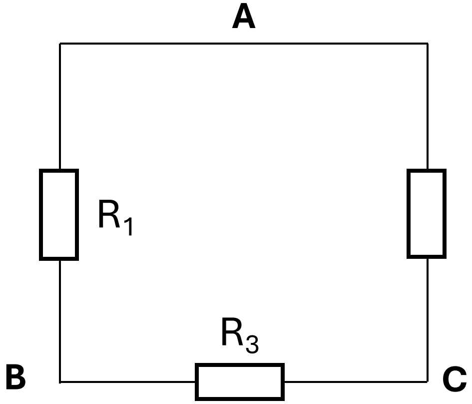
$$R_C = \frac{R_{AC}.R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

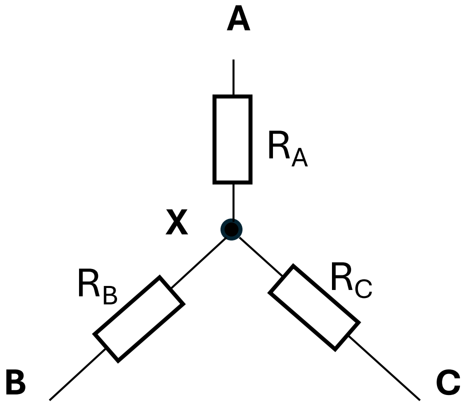
$$R_{BC} = \frac{R_A.R_B + R_A.R_C + R_B.R_C}{R_A}$$

$$R_{AB} = \frac{R_A.R_B + R_A.R_C + R_B.R_C}{R_C}$$

$$R_{AC} = \frac{R_A.R_B + R_A.R_C + R_B.R_C}{R_B}$$

Dans notre exercice

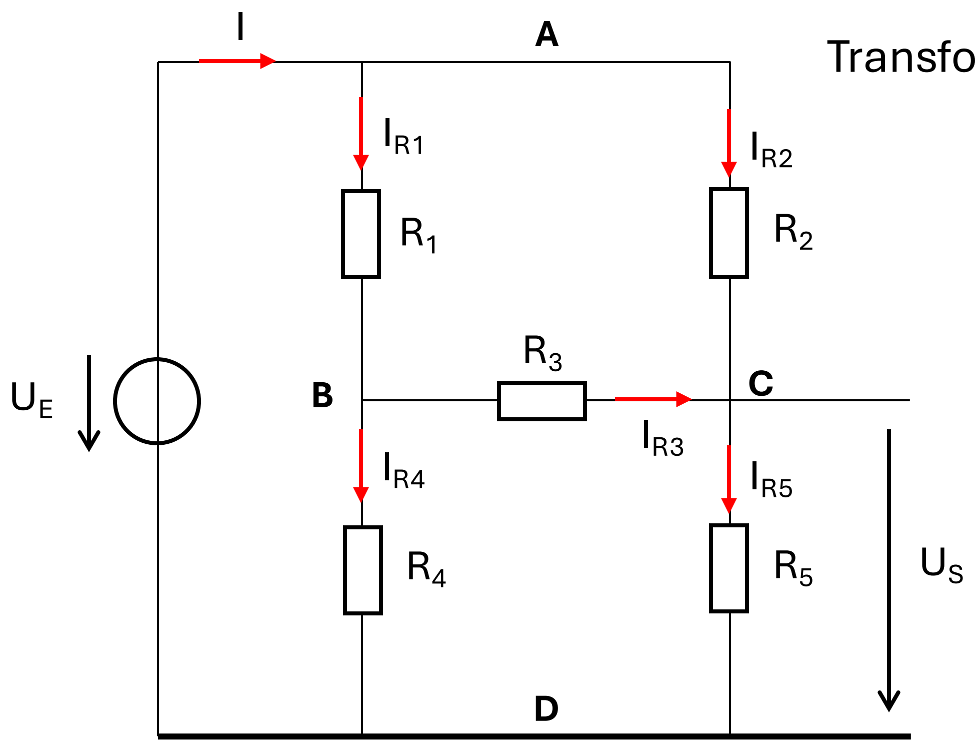




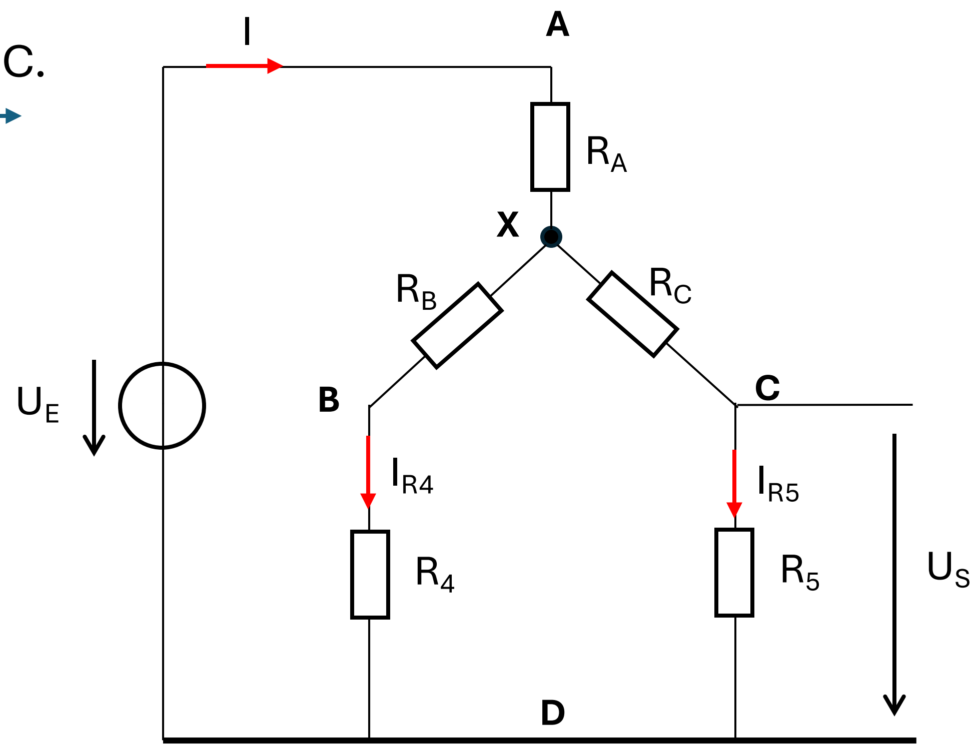
$$R_A = \frac{R_1.R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_B = \frac{R_1.R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_C = \frac{R_2.R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$



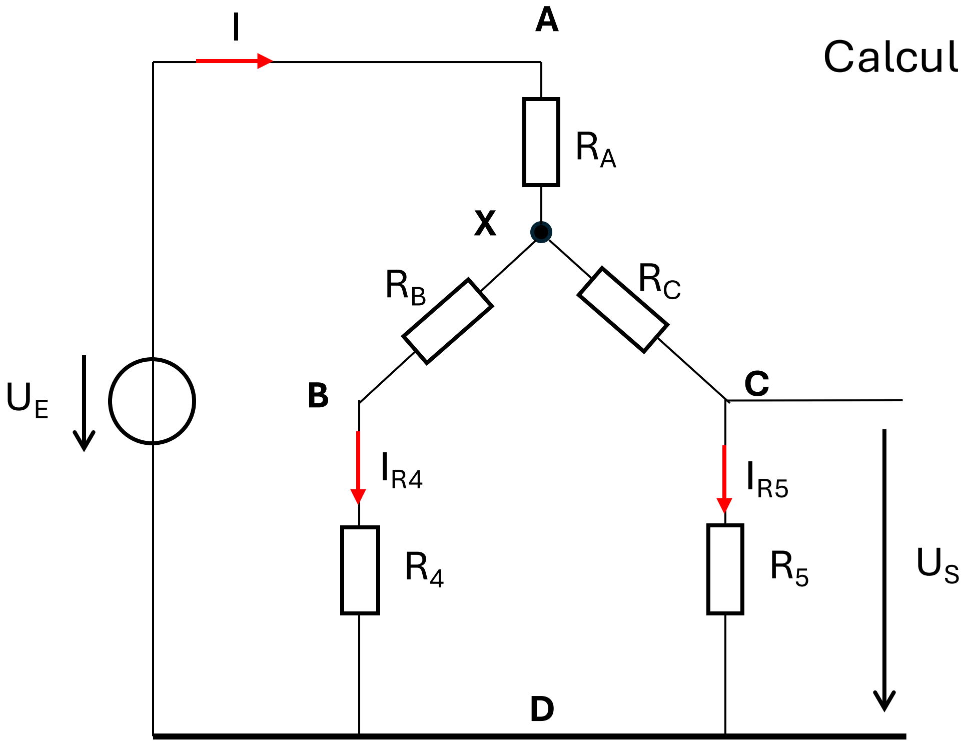
Transformation de ABC.



Bien mettre en évidence les expressions littérales et les valeurs numériques

Remarque :

- Les deux circuits sont identiques et entre C et D la résistance est la même (idem entre B et D).
- Conséquences :
  - Les courants I_{R4} et I_{R5} (utile pour calculer U_S) sont les mêmes dans les deux circuits
  - Les courants I_{R1}, I_{R2} et I_{R3} ont disparu.



Calcul de la résistance équivalente

R_C *et* R_5 *en série :* $R_{C5} = R_C + R_5$

de même R_B et R_4 en série : $R_{B4} = R_B + R_4$

R_{B4} et R_{C5} en parallèle : $R_{BC45} = \dfrac{R_{B4} \cdot R_{C5}}{R_{B4} + R_{C5}}$

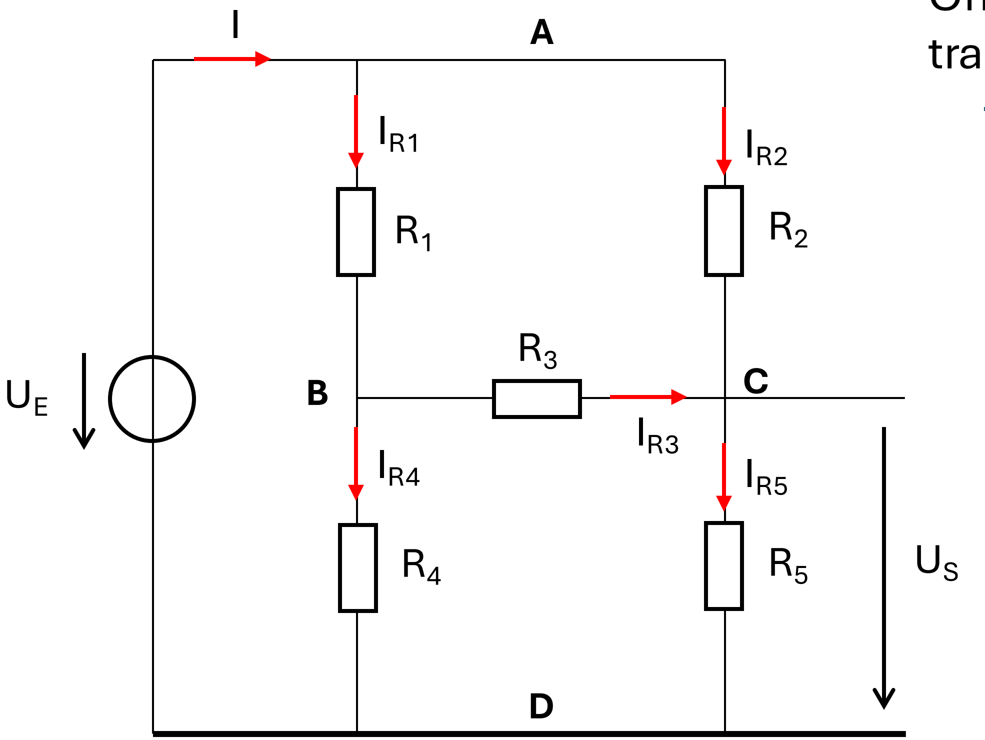
R_{BC45} et R_A sont en série : $R_{EQ} = R_{BC45} + R_A$

$\boldsymbol{R_{EQ}}$ est la résistance équivalente de tout le réseau

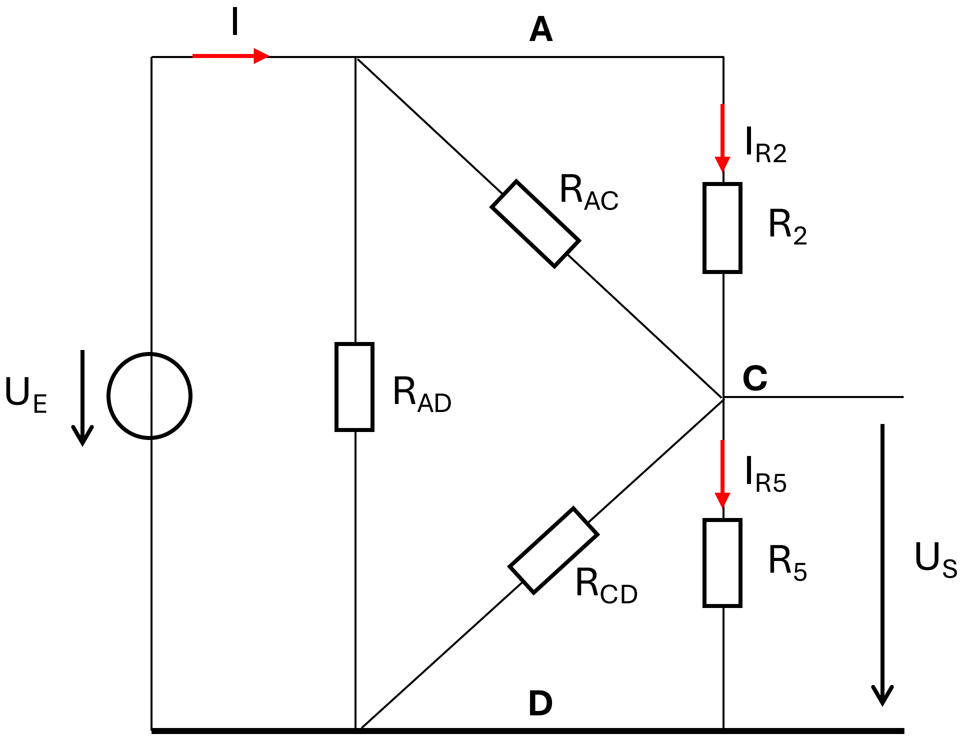
On en déduit : $I = \dfrac{U_E}{R_{EQ}}$ et $P = U_E \cdot I = \dfrac{U_E^2}{R_{EQ}} = R_{EQ} \cdot I^2$

Après, **cela se complique un peu pour U_S**.
Le plus simple est de constater que le courant I se divise en I_{R4} et I_{R5}.
On applique la formule du diviseur de courant :

$$I_{R5} = I.\frac{R_{B4}}{R_{B4} + R_{C5}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{U_S = R_5 \cdot I_{R5}}$$



On aurait pu transformer ACD**B**



Remarque :

- Le nœud B disparaît
- Les deux circuits sont toujours identiques et entre C et D la résistance R_5 est la même.
- Les courants I_{R2} et I_{R5} sont les mêmes dans les deux circuits
- Les courants I_{R1}, I_{R3} et I_{R4} ont disparu.

R_2 est parallèle à $R_{AC} \rightarrow R_{AC2}$, de même R_{CD} et $R_5 \rightarrow R_{CD5}$, etc…
Pour le calcul U_S on voit que R_{AC2} et R_{CD5} forment un diviseur de tension résistif.
Il n'est pas nécessaire de calculer I_{R5} ici : $U_S = U_E \frac{R_{CD5}}{R_{CD5}+R_{AC2}}$